代数幾何学シンポジウム記録
1978年度 pp.216-227

フェルマー多様体に関する
ホッジ予想について

東大理　　塩田徹治

§0.

$m \geqslant 1$, $n \geqslant 0$ とする。$(n+1)$ 次元の射影空間 $\mathbb{P}^{n+1}$ 内の非特異超曲面

(1) $\quad X_m^n \qquad x_0^m + x_1^m + \cdots + x_{n+1}^m = 0$

を、n 次元 m 次の Fermat 多様体とよぶ。以下断らない限り、複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考える。

以下では、X_m^n に関する Hodge 予想：$n = 2p$ の時

(2) $\quad H^{p,p} \cap H^n(X_m^n, \mathbb{Q}) = C(X_m^n)_{\mathbb{Q}}$,

(右辺は p 次元の代数的サイクル類の生成する空間)を、m, n に関する条件 (P_m^n) の下に証明する方法を述べる。これは m が素数の場合の最近の Ran [R] の結果の拡張を与えると同時に、証明の簡易化になっている。この際基礎となるのは、X_m^n の帰納的構造([F], §1) である。

§1

この節では (2) の左辺を記述する。m, n は前の通りとし、G_m^n を次の群とする。

$$G_m^n = (\overbrace{\mu_m \times \cdots \times \mu_m}^{(n+2)\text{コ}})/(\text{diaagonal}).$$

μ_m は 1 の m 乗根の巡回群。G_m^n の元を

$$g = [\zeta_0 : \cdots : \zeta_{n+1}] \qquad (\zeta_i \in \mu_m)$$

とかく。G_m^n は X_m^n の自己同型として作用する：

$$g : X_m^n \longrightarrow X_m^n$$

$$(x_0 : \cdots : x_{n+1}) \longmapsto (\zeta_0 x_0 : \cdots : \zeta_{n+1} x_{n+1})$$

従って G_m^n は $H^i(X_m^n, \mathbb{Q})$, $H^i(X_m^n, \mathbb{C})$, … に作用している。$i \neq n$ のとき、これらは $\{0\}$ かまたは 1 次元で、G_m^n は自明に作用する。$i = n$ のとき、G_m^n の指標 α に関する $H^n(X_m^n, \mathbb{C})$ の固有空間を $V(\alpha)$ とおく：$V(\alpha) = \{\xi \in H^n(X_m^n, \mathbb{C}) \mid g^*(\xi) = \alpha(g)\xi\}$. 従って、$G_m^n$ の指標群 $\hat{G}_m^n$ は自然に次と同一視される：

$$\hat{G}_m^n = \{\alpha = (a_0, \cdots, a_{n+1}) \mid a_i \in \mathbb{Z}/m,\ a_0 + \cdots + a_{n+1} = 0\}$$

$$\alpha(g) = \zeta_0^{a_0} \cdots \zeta_{n+1}^{a_{n+1}}$$

次の記号を固定する：

$$\mathfrak{A}_m^n = \{\alpha \in G_m^n \mid a_i \neq 0,\}$$

$$|\alpha| = \sum_{i=0}^{n+1} \langle a_i \rangle / m \qquad \langle a_i \rangle \in a_i,\ 1 \leq \langle a_i \rangle \leq m-1.$$

$$H^n_{prim}(X^n_m) = \begin{cases} H^n(X^n_m, \mathbb{C}) & n : \text{odd} \\ \text{primitive part of } H^n(X^n_m, \mathbb{C}) & n : \text{even} > 0 \\ \ker.(\deg : H^0(X^0_m, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}) & n = 0. \end{cases}$$

$$H^{p.q} = \text{type } (p.q)\text{-subspace of } H^n_{prim}(X^n_m), \quad p+q=n$$

Th. I. 以上の記号の下に、次が成立する。

(i) $$H^n_{prim}(X^n_m) = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}^n_m} V(\alpha), \quad \dim V(\alpha) = 1 \quad (\forall \alpha \in \mathfrak{A}^n_m).$$

(ii) $$H^{p.q} = \bigoplus_{|\alpha| = q+1} V(\alpha) \qquad (p+q=n)$$

(iii) $$(H^{p.p} \cap H^n(X^n_m, \mathbb{Q}))_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{B}^n_m} V(\alpha) \qquad (n=2p)$$

ここで

$$\mathfrak{B}^n_m = \{\alpha \in \mathfrak{A}^n_m \mid |t\alpha| = p+1, \ \forall t \in (\mathbb{Z}/m)^\times\}$$

ただし $t.\alpha \overset{\text{def}}{=} (ta_0, \ldots, ta_{n+1})$.

(vi) $$((H^{p.p+1} + H^{p+1,p}) \cap H^n(X^n_m, \mathbb{Q}))_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{B}^n_m} V(\alpha) \qquad (n=2p+1)$$

$$\mathfrak{B}^n_m = \{\alpha \in \mathfrak{A}^n_m \mid |t\alpha| = p+1 \text{ or } p+2, \ \forall t\}.$$

証明は Ogus, Ann. Math. 108 (1978) 又は Katz, Ann. ENS. 2 (1969) 参照。(iii),(iv) は $H^n(\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\zeta_m)$ における G^n_m と $Gal(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})$ の作用の可換性による。

さて n が偶数のとき、$C(X_m^n)_{\mathbb{Z}} \subset H^n(X_m^n, \mathbb{Z})$ を X_m^n の次元 $n/2$ の代数的サイクルで生成される部分群、$C_{prim}(X_m^n)_{\mathbb{Z}}$ をその primitive part とし

$$C_{prim}(X_m^n) = C_{prim}(X_m^n)\otimes\mathbb{C} \subset H^n_{prim}(X_m^n)$$

とおく。明らかにこれは G_m^n-部分加群だから、ある $\mathcal{C}_m^n \subset \mathfrak{A}_m^n$ があって

$$C_{prim}(X_m^n) = \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{C}_m^n} V(\alpha) .$$

所で一般に ($p = n/2$)

$$H^{p,p} \cap H^n(X_m^n, \mathbb{Q}) \supset C(X_m^n)_{\mathbb{Q}}$$

だから $\mathcal{C}_m^n \subset \mathcal{B}_m^n$ である。X_m^n に関する Hodge 予想は次のように定式化できる:

$$\mathrm{Hodge}(X_m^n) : \quad \mathcal{C}_m^n = \mathcal{B}_m^n \quad ? \qquad (n : \text{even})$$

任意の m に対し、これは $n = 0$ 又は $n = 2$ の時正しい ($n = 0$ は自明、$n = 2$ は Lefschetz の定理による。)

以下において、m は固定して n に関する帰納法で、$\forall\alpha\in\mathcal{B}_m^n$ が $\mathcal{C}_m^n$ に属する条件を調べる。

§2.

前節で X_m^n 上の type (p,p) の有理係数コホモロジー類（略して Hodge class）の構造が明らかになったから、対応する代数的サイクルを構成することを目標にする。

まず X_m^n の幾何的構造を復習する（[F] §1.）

次のような図式が存在する： $n=r+s$, $r,s\geq 1$.

$$
(\ast)\qquad
\begin{tikzcd}
\beta^{-1}(Y) \arrow[r, hook, "j'"'] \arrow[d, "\beta'"'] & Z_m^{r,s} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[rrd, "\psi"'] & & Z_m^{r,s}/\mu_m \arrow[d, "\Phi"] & (X_m^{r-1}\times\mathbb{P}^s) \amalg (\mathbb{P}^r\times X_m^{s-1}) \arrow[l, hook'] \arrow[d, "\mathrm{proj.}"] \\
Y = X_m^{r-1}\times X_m^{s-1} \arrow[r, hook, "j"'] & X_m^r\times X_m^s \arrow[rr, dashed, "\varphi"'] & & X_m^n & X_m^{r-1}\amalg X_m^{s-1} \arrow[l, hook'] \\
 & (x_i)\quad (y_j) & & (z_k) &
\end{tikzcd}
$$

図は次の順序でみる。

φ : m 次の有理写像： $z_i = x_i y_{s+1}$, $z_{r+1+j} = \varepsilon x_{r+1} y_j$

$(0\leq i\leq r,\ 0\leq j\leq s)$. ε は $\varepsilon^m=-1$ なる数.

Y : φ の不確定点 $x_{r+1}=y_{s+1}=0$.

β : $X_m^r\times X_m^s$ を Y で blow-up, β' は制限.

$\psi = \beta\circ\varphi$ morphism となる.

π, Φ をいう前に群の作用を合せて考えると φ は次の準同型に関して equivariant:

$$h : G_m^r \times G_m^s \longrightarrow G_m^n$$

$$([\zeta_0 : \cdots : \zeta_r : 1], [\zeta_0' : \cdots : \zeta_s' : 1]) \longmapsto [\zeta_0 : \cdots : \zeta_r : \zeta_0' : \cdots : \zeta_s']$$

かつ $G_m^r \times G_m^s$ は Y を不変にし $\mathrm{Ker}(h) = \mu_m$ は Y 上自明に作用する。従って $G_m^r \times G_m^s$ は $Z_m^{r,s}$ に作用し μ_m は $\beta^{-1}(Y)$ を点毎に固定する。

π : $Z_m^{r,s}$ の $\mu_m = \mathrm{Ker}(h)$ による商写像とすると

$\psi = \overline{\Psi} \circ \pi$ と分解できる。(Z/μ_m は非特異)

そて、この $\overline{\Psi}$ は実は X_m^n の部分多様体

$X_m^{r-1} = \{(x_0 : \cdots : x_r : 0 : \cdots : 0)\}$ および

$X_m^{s-1} = \{(0 : \cdots : 0 : y_0 : \cdots : y_s)\}$

を中心とする blow-up となる。しかも $\overline{\Psi}$ は、$Z_m^{r,s}/\mu_m$ に作用する $G_m^r \times G_m^s/\mu_m \simeq G_m^n$ に関して equivariant.

上の図式を用いて $H^n(Z_m^{r,s}/\mu_m)$ を二通りの仕方で計算できる:

$$(1) \quad H^n(Z_m^{r,s}/\mu_m) \underset{\pi}{\simeq} H^n(Z_m^{r,s})^{\mu_m}$$
$$\underset{\beta}{\simeq} [H^n(X_m^r \times X_m^s) \oplus H^{n-2}(X_m^{r-1} \times X_m^{s-1})]^{\mu_m}$$
$$\simeq H^n(X_m^r \times X_m^s)^{\mu_m} \oplus H^{n-2}(X_m^{r-1} \times X_m^{s-1})$$

$$(2) \quad H^n(Z_m^{r,s}/\mu_m) \overset{\overline{\Psi}}{\simeq} H^n(X_m^n) \oplus \sum_{j=1}^{s} H^{n-2j}(X_m^{r-1}) \oplus \sum_{k=1}^{r} H^{n-2k}(X_m^{s-1})$$

blow-up によるコホモロジーの挙動については

SGA 7 II, XVIII Katz, SGA 5 VII, 又は "Complex Analysis and Algebraic Geometry" (岩波－Cambridge) の河井 G の論文を参照されたい。

さて (1) 及び (2) の右辺は G_m^n－加群とみなされる。Künneth 分解と Th.I (i) を使ってこれを $\hat{G}_m^n \ni \alpha$ に関する固有空間に分解する。然る後 $\mathfrak{A}_m^n \ni \alpha$ なる α に関する固有空間の直和をとることにより、次の結果を得る。

Th.II. m を固定。$n = r + s$, $r, s \geqq 1$ のとき次の性質をもつ同型が存在する：

$$H^n_{prim}(X^n_m) \underset{f}{\xleftarrow{\sim}} \left[H^r_{prim}(X^r_m) \otimes H^s_{prim}(X^s_m)\right]^{\mu_m} \oplus \left[H^{r-1}_{prim}(X^{r-1}_m) \otimes H^{s-1}_{prim}(X^{s-1}_m)\right].$$

a) f は G_m^n- equivariant

b) x (又は y) が右辺の第一項 (又は第二項) に属するとき、x が type (p, q) $\Rightarrow$ $f(x)$ も type (p, q).

y が type (p', q') $\Rightarrow$ $f(y)$ は type $(p'+1, q'+1)$.

c) f は代数的サイクルを保存する。Ep S.

(c1) r, s 偶数なら $f : \left[C(X^r_m) \otimes C(X^s_m)\right]^{\mu_m} \hookrightarrow C(X^n_m)$.

(c2) r, s 奇数なら $f : C(X^{r-1}_m) \otimes C(X^{s-1}_m) \hookrightarrow C(X^n_m)$.

ここで $C(X^n)$ は偶数次元 $(n = 2p)$ の多様体上の p 次元の代数的サイクルの primitive part.

より詳しく、Z_1 (又は Z_2) が X_m^{r-1} (又は X_m^{s-1}) の上の中間次元の代数的サイクルであるとき

$$f(cl(Z_1) \otimes cl(Z_2)) = \mathrm{const.}\ cl(Z_1 \vee Z_2)$$

となる. ただし $Z_1 \vee Z_2$ は X_m^n の上で $Z_1 \subset X_m^{r-1}$ と $Z_2 \subset X_m^{s-1}$ を $\mathbb{P}^1$ で結んで得られる代数的サイクル (join) である.

注意. 上の Th.II の (c1), (c2) は Fermat 多様体 X_m^n 上の代数的サイクルを低次元の $X_m^{n'}$, $n'<n$ から構成する方法を与える。即ち (c1) は、$X_m^r \times X_m^s$ 上のサイクルから X_m^n $(n=r+s)$ 上のそれを導く方法の特別の場合で これは [F] において. 標数 p の X_m^n が supersingular である条件、或は標数 p の X_m^2 (曲面) に関する Tate 予想の証明に使われた。これに対し (c2) は $X_m^{r-1} \times X_n^{s-1}$ 上のサイクルから X_m^n $(n=r+s)$ のサイクルを作る方法で Ran [R] によって最初に導入された。ただ証明は図式(*)に基く上の証明の様には見易くない。

§3

$n = r + s,\ r, s \geq 1$ とし 次の記号を定義する：

$$\mathfrak{A}_m^{r,s} = \{(\beta, \gamma) \in \mathfrak{A}_m^r \times \mathfrak{A}_m^s \mid \beta = (b_0, \cdots, b_{r+1}),\ \gamma = (c_0, \cdots, c_{s+1}),\ b_{r+1} + c_{s+1} = 0\}$$

$$\mathfrak{A}_m^{r,s} \ni (\beta, \gamma) \longmapsto \beta \# \gamma = (b_0, \cdots, b_r, c_0, \cdots, c_s) \in \mathfrak{A}_m^n.$$

又 $\mathfrak{A}_m^{r-1} \times \mathfrak{A}_m^{s-1} \ni (\beta', \gamma') \longrightarrow \beta' * \gamma' \in \mathfrak{A}_m^n$ も同様に定義する： $\beta' = (b_0, \cdots, b_r),\ \gamma' = (c_0, \cdots, c_s)$ に対し

$$\beta' * \gamma' = (b_0, \cdots, b_r, c_0, \cdots, c_s).$$

明らかに

$$\mathfrak{A}_m^n \overset{\text{bijection}}{\longleftrightarrow} \mathfrak{A}_m^{r,s} \coprod (\mathfrak{A}_m^{r-1} \times \mathfrak{A}_m^{s-1})$$

しかも Th. II の分解はこれと対応している。i.e.

$$\begin{cases} V(\alpha) \longleftrightarrow V(\beta) \otimes V(\gamma) & \text{if } \alpha = \beta \# \gamma. \\ V(\alpha) \longleftrightarrow V(\beta') \otimes V(\gamma') & \text{if } \alpha = \beta' * \gamma'. \end{cases}$$

Th. II, (c1), (c2) により

Cor. $$\mathcal{C}_m^n \supset \bigcup_{\substack{r+s=n \\ r,s \text{ even}}} [(\mathcal{C}_m^r \times \mathcal{C}_m^s) \cap \mathfrak{A}_m^{r,s}] \cup \bigcup_{\substack{r+s=n \\ r,s \text{ odd}}} [\mathcal{C}_m^{r-1} \times \mathcal{C}_m^{s-1}]$$

実はより強く、右辺を置換群 $\mathfrak{S}_{n+2}$ の作用で動かしたものの和集合が $\mathcal{C}_m^n$ に含まれる。

そこで Hodge (X_m^n) を n に関する帰納法で証明するには、次の条件を確められばよい。

$\forall \alpha \in \mathcal{B}_m^n$ (n: even >2) に対し 次の条件

(P1) $\exists \beta \in \mathcal{B}_m^r$, $\exists \gamma \in \mathcal{B}_m^s$, $(\beta, \gamma) \in \mathfrak{A}_m^{r,s}$ s.t.

$$\beta \# \gamma \sim \alpha \qquad (\sim \text{ は } \mathfrak{S}_{n+2}\text{-同値の意})$$

(P2) $\exists \beta' \in \mathcal{B}_m^{r-1}$, $\exists \gamma' \in \mathcal{B}_m^{s-1}$ s.t.

$$\beta' * \gamma' \sim \alpha$$

のいづれかが成立つ。

さて $\alpha = (a_0, \cdots, a_{n+1}) \in \mathfrak{A}_m^n$ が

$$\alpha \sim (\underbrace{1, \cdots, 1}_{x_1}, \underbrace{2, \cdots, 2}_{x_2}, \cdots, \underbrace{m-1, \cdots, m-1}_{x_{m-1}})$$

となるとき $\alpha \in \mathcal{B}_m^n$ となる条件は

$$\sum_{\nu=1}^{m-1} \langle t\nu \rangle x_\nu = \left(\frac{n}{2}+1\right) m, \qquad \forall t \in (\mathbb{Z}/m)^\times$$

である。今

$$\sum \langle t\nu \rangle x_\nu = m y \qquad \text{〃}$$

の非負整数解 $(x_1, \cdots, x_{m-1}; y)$ (ただし $y \geq 1$) のなす半群を M_m とかく。M_m の元をが二つの元の和とかけないとき indecomposable とよぶ。それらの集合 $I_m \subset M_m$ は有限個から成り ("Gordan の補題") 勿論 M_m の最小の生成元系を与える。一方 $M_m(y)$ で与えられた y をもつ部分集合と

する. $M_m(1)$ は $[\frac{m}{2}]$ コの元 $(1,0,\cdots,0,1;1)$, $(0,1,0,\cdots,0,1,0;1)$ $\cdots\cdots$ $(0,\cdots,0,2,0,\cdots,0;1)$ (ただし最後の元は m:偶の時のみ) から成る. さて M_m の元 ξ が <u>quasi-decomposable</u> とは $\exists\, \eta \in M_m(1)$ s.t. $\xi + \eta = \xi' + \xi''$, $\xi', \xi'' \in M_m$, $\neq \xi$ となることと定義する.

次の条件を (P_m), (P_m^n) を考える. $(m \geq 1,\ n$: even$)$

(P_m) $I_m \ni \xi$ で $y \geq 3$ なるものは全て quasi-~~in~~decomposable.

(P_m^n) I_m の元で $3 \leq y \leq \frac{n}{2}+1$ なるものは全て quasi-decomposable.

たとえば M_m が $M_m(1) \cup M_m(2)$ で生成されれば (P_m) が満たされる. 以上の用語で結論は

$$\text{Th III}\ \begin{cases} (P_m^n) \implies \mathrm{Hodge}(X_m^n) \\ (P_m) \implies \mathrm{Hodge}(X_m^n) \quad \text{for all } n \text{ (even)}. \end{cases}$$

<u>Lemma</u> m が素数又は $m=4$ の時 $I_m = M_m(1)$.

証明は $\mathrm{rank}\left(\langle t\nu \rangle_{1 \leq t, \nu \leq m-1}\right) = \frac{m+1}{2}$ による.

<u>Cor</u> (R) m が素数又は $m=4$ の時 $\mathrm{Hodge}(X_m^n)$ が任意の n で成立. しかも $C(X_m^n)_{\mathbb{Q}}$ は X_m^n 上の $\frac{n}{2}$ 次元の線型部分空間 $\simeq \mathbb{P}^{\frac{n}{2}}$ で張られる.

最後の部分は、Th II の末尾と X_m^0 が m コの点から成ることから帰納法で出る。(これが $\mathbb{Q}$ でなく $\mathbb{Z}$ 上でいえるか否かは興味ある問題である。)

m が素数でないとき、一般に $I_m \neq M_m(1)$ であるが、小さい m で実験してみると条件 (P_m) が満されている。($m \leq 10$ では少くともよい)

問題 (イ) $d_m = \max\limits_{(x_\nu;y)\in I_m} y$ は m で評価できるか?

(ロ) (P_m) はいつも成立するか?

最後に、次の結果を述べておく。

Th. IV 条件 (P_m) の下に(とくに m が素数又は ≤ 10 ならばよい)任意の直積 $X_m^{r_1}\times\cdots\times X_m^{r_k}$ の(任意の $p \leq r_1+\cdots+r_k$ についての)Hodge予想が成立する。

文献(詳細は近く出る予定の論文参照)

[R] Z. Ran, Cycles on Fermat hypersurfaces (to appear)

[F] T. Katsura – T. Shioda, On Fermat varieties Tôhoku Math. J. (1979)